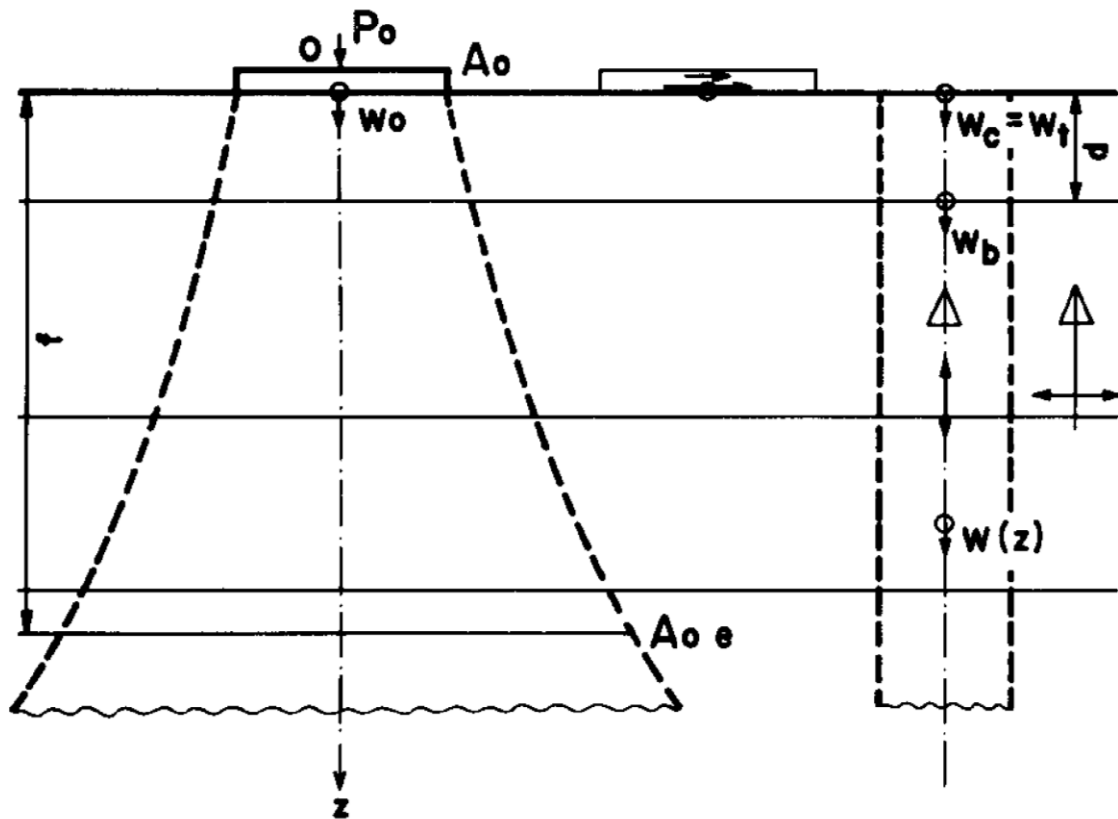




(ویژه کلاس‌های مجازی)

اندرکنش خاک و سازه- فصل پنجم: سختی دینامیکی

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)



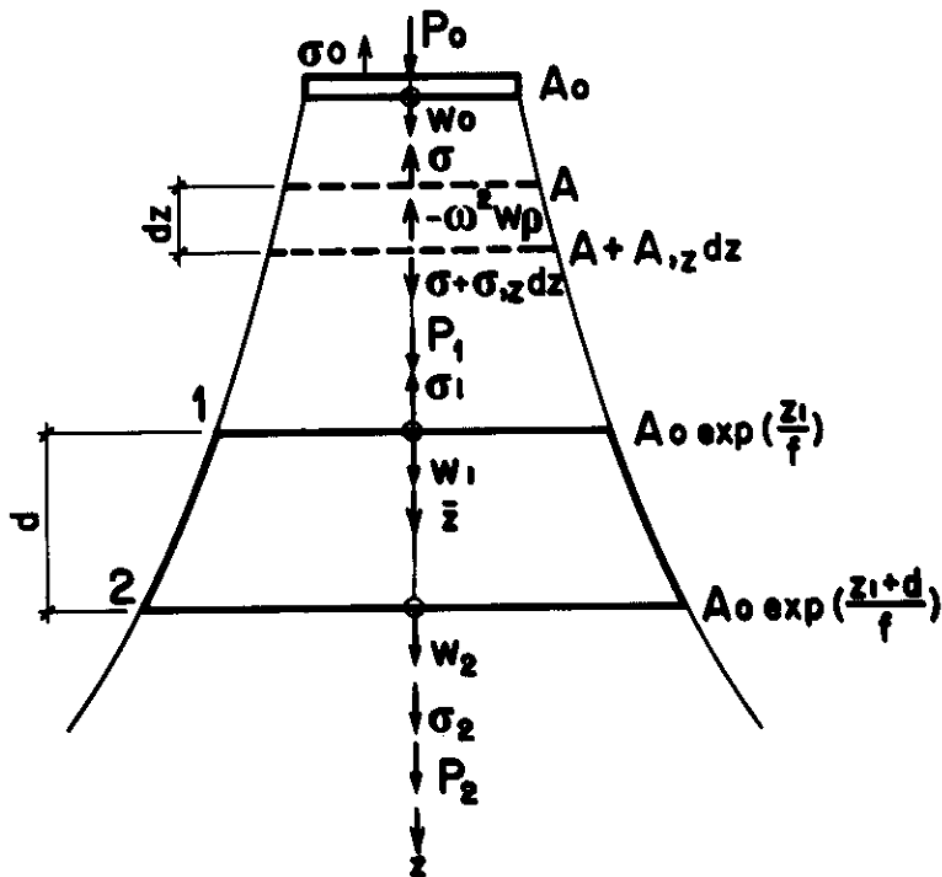
**Figure 5-1** Dynamic stiffness and free field modeled as rod with exponentially varying area and as prismatic rod, respectively.



(ویژه کلاس های مجازی)

اندرکنش خاک و سازه - فصل پنجم: سختی دینامیکی

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)



**Figure 5-2** Rod with exponentially varying area (infinitesimal element and layer).

تیر ایتری صبق اصل تناسب  $m \ddot{w} = \rho dV \ddot{w}$

$$\ddot{w} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\omega^2 w$$

فرض می کنیم تغییرات  $w$  بر حسب زمان

متناسب با  $e^{i\omega t}$  باشد پس  $\ddot{w} = -\omega^2 w$

$$m \ddot{w} = \rho dV \omega^2 w = \rho \left( A + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) dz \times \omega^2 w$$

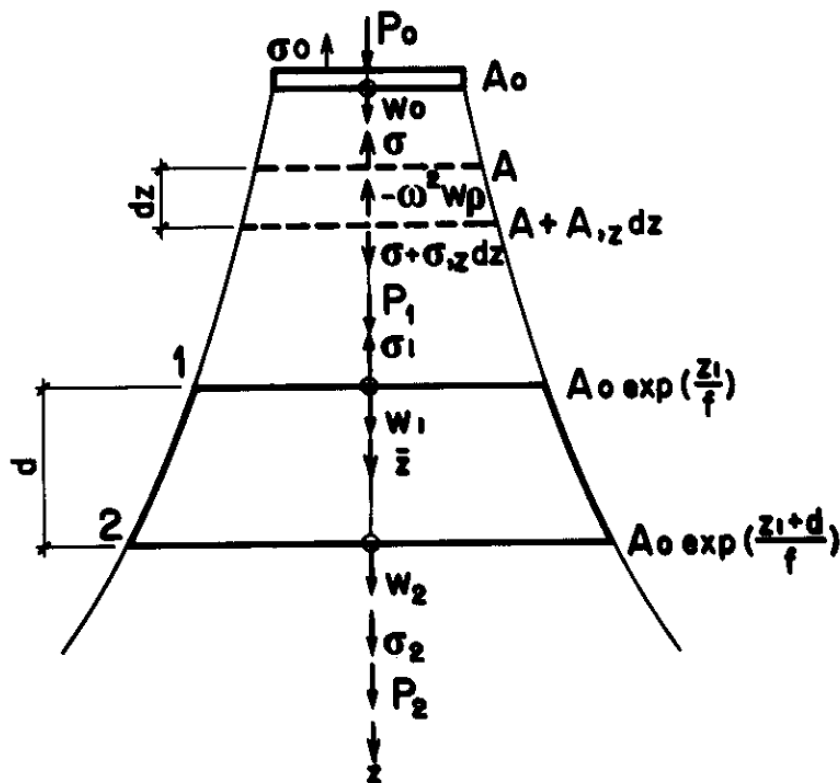
$$m \ddot{w} = -\rho \omega^2 w \left( A + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) dz \quad \text{تیر ایتری}$$



(ویژه کلاس های مجازی)

اندرکنش خاک و سازه - فصل پنجم: سختی دینامیکی

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)



$$\downarrow \sum F_z = m \ddot{w} \quad | \quad \downarrow \sum F_z - m \ddot{w} = 0 \quad (\text{اصل دالامبر})$$

$$-\sigma A + \left( \sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz \right) \left( A + \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) - \left[ -\rho \omega^2 w \left( A + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) dz \right] = 0$$

$$\Rightarrow \left[ A \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \sigma \frac{\partial A}{\partial z} + \rho \omega^2 A w \right] dz = 0$$

$$\Rightarrow A \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \sigma \frac{\partial A}{\partial z} + \rho A \omega^2 w = 0$$

$$A = A_0 e^{(z/f)} \quad \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{f} A_0 e^{(z/f)} = \frac{1}{f} A$$

$$\Rightarrow AE \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{AE}{f} \frac{\partial w}{\partial z} - \rho A \omega^2 w = 0$$



## ویژه کلاس های مجازی

## اندرکنش خاک و سازه - فصل پنجم: سختی دینامیکی

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)

$$\left( \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} A + \sigma_z \frac{\partial A}{\partial z} + \rho \omega^2 w A \right) dz = 0$$

$$\sigma = E \epsilon = E \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\frac{E}{\rho} = v_L^2 \quad \text{یا} \quad c_p \quad \text{یا} \quad v_c$$

$$v_c \quad \text{یا} \quad v_L \quad \text{یا} \quad c_p = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

سرعت امواج طولی

$$\rightarrow EA \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{f} EA \frac{\partial w}{\partial z} + \rho \omega^2 A w = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{f} \frac{\partial w}{\partial z} + \rho \frac{\omega^2}{E} w = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{f} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\omega^2}{v_L^2} w = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{f} \frac{\partial w}{\partial z} + \left( \frac{\omega f}{v_L} \right)^2 \frac{1}{f^2} w = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{f} \frac{\partial w}{\partial z} + \left( \frac{a_0}{f} \right)^2 w = 0$$

$$w(z) = \bar{w}(z)$$

$$w = e^{i\lambda z}$$

$$a_0 = \frac{\omega f}{v_L} \quad \text{فرکانس بدون بعد}$$

حل امواج در زمان را با تبدیل میسر:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{f} \frac{\partial w}{\partial z} + \left( \frac{\omega}{v_c} \right)^2 w = 0$$

$$\textcircled{1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{f} \frac{\partial w}{\partial z} + \left( \frac{a_0}{f} \right)^2 w = 0 \quad a_0 = \frac{\omega f}{v_c}$$

$$\text{مسئله امواج یک بعدی موج} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = - \frac{\omega^2}{v_c^2} w \quad f \rightarrow \infty \quad \text{هرگاه}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{v_c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$w = w(z, t) \quad \text{در صورت لرزانی}$$

$$w = w(z) \quad \text{امواج لرزانی}$$

$$w = A e^{i\lambda z}$$

$$\textcircled{1} -\lambda^2 + \frac{1}{f} i\lambda + \left( \frac{a_0}{f} \right)^2 = 0$$

$$\lambda^2 - \left( \frac{i}{f} \right) \lambda - \left( \frac{a_0}{f} \right)^2 = 0$$

$$\Delta = -\frac{1}{f^2} - 4(1) \left[ -\frac{a_0^2}{f^2} \right] = -\frac{1}{f^2} (1 - 4a_0^2)$$



(ویژه کلاس های مجازی)

اندرکنش خاک و سازه - فصل پنجم: سختی دینامیکی

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)

$$\gamma^2 - \left(\frac{i}{f}\right) \gamma - \left(\frac{a_0}{f}\right)^2 = 0$$

$$\Delta = -\frac{1}{f^2} - 4(1) \left[ -\frac{a_0^2}{f^2} \right] = -\frac{1}{f^2} (1 - 4a_0^2)$$

$$\gamma_{1,2} = \frac{i/f \pm \sqrt{-1/f^2 (1 - 4a_0^2)}}{2} = \frac{i/f (1 \pm \sqrt{1 - 4a_0^2})}{2}$$

$$\gamma_1 = \frac{i}{2f} (1 - \sqrt{1 - 4a_0^2})$$

$$\Rightarrow \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{i}{f}$$

$$\gamma_2 = \frac{i}{2f} (1 + \sqrt{1 - 4a_0^2})$$

$$\gamma_1 i = -\frac{1}{2f} (1 - \sqrt{1 - 4a_0^2})$$

$$\gamma_2 i = -\frac{1}{2f} (1 + \sqrt{1 - 4a_0^2})$$

$$w = a e^{i\gamma_1 z} + b e^{i\gamma_2 z}$$

لا باید حقیقی باشد تا موج تشکیل شود:

$$\gamma_1 = \frac{i}{2f} (1 - \sqrt{1 - 4a_0^2}) \quad \gamma_1 i = -\frac{1}{2f} (1 - \sqrt{1 - 4a_0^2})$$

$$\gamma_2 = \frac{i}{2f} (1 + \sqrt{1 - 4a_0^2}) \quad \gamma_2 i = -\frac{1}{2f} (1 + \sqrt{1 - 4a_0^2})$$

موج تشکیل نمی شود  $\Rightarrow$  حقیقی  $\Rightarrow e^{i\gamma z}$   $\Rightarrow$  فتلط  $\gamma_1, \gamma_2$  : if  $1 - 4a_0^2 \gg 0$

موج تشکیل می شود  $\Rightarrow$  فتلط  $\Rightarrow e^{i\gamma z}$   $\Rightarrow$  حقیقی  $\gamma_1, \gamma_2$  : if  $1 - 4a_0^2 < 0$

$1 - 4a_0^2 = 0 \quad a_0 = \frac{1}{2} \quad \text{cut off frequency} \quad a_0 = \frac{\omega f}{V_L}$

$4a_0^2 \ll 1 \quad a_0 \ll \frac{1}{2} \quad \text{موج تشکیل نمی شود}$

$4a_0^2 > 1 \quad a_0 > \frac{1}{2} \quad \text{موج تشکیل می شود}$



## ویژه کلاس های مجازی

## اندرکنش خاک و سازه - فصل پنجم: سختی دینامیکی

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)

$$Z = z_1 \Rightarrow w = \frac{a e^{i\gamma_1 z_1}}{\omega_1} + \frac{b e^{i\gamma_2 z_1}}{\omega_2}; \sigma = E(i\gamma_1 a e^{i\gamma_1 z_1} + i\gamma_2 b e^{i\gamma_2 z_1})$$

$$\omega_1 = a' + b'$$

$$Z = z_1 \Rightarrow \sigma_1 = E i \gamma_1 \frac{a e^{i\gamma_1 z_1}}{\omega_1} + E i \gamma_2 \frac{b e^{i\gamma_2 z_1}}{\omega_2}$$

$$\sigma_1 = E i \gamma_1 a' + E \gamma_2 i b'$$

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \sigma_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ E \gamma_1 i & E \gamma_2 i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a' \\ b' \end{Bmatrix}$$

$$Z_2 = z_1 + d \Rightarrow w_2 = a e^{i\gamma_1(z_1+d)} + b e^{i\gamma_2(z_1+d)}$$

$$= e^{i\gamma_1 d} \frac{a e^{i\gamma_1 z_1}}{\omega_1} + e^{i\gamma_2 d} \frac{b e^{i\gamma_2 z_1}}{\omega_2}$$

$$= e^{i\gamma_1 d} a' + e^{i\gamma_2 d} b'$$

$$\sigma_2 = E a i \gamma_1 e^{i\gamma_1(z_1+d)} + E b i \gamma_2 e^{i\gamma_2(z_1+d)}$$

$$= E \gamma_1 i e^{i\gamma_1 d} \frac{a e^{i\gamma_1 z_1}}{\omega_1} + E \gamma_2 i \frac{b e^{i\gamma_2 z_1}}{\omega_2} e^{i\gamma_2 d}$$

$$\sigma_2 = E \gamma_1 i e^{i\gamma_1 d} a' + E \gamma_2 i e^{i\gamma_2 d} b'$$

$$\begin{Bmatrix} w_2 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\gamma_1 d} & e^{i\gamma_2 d} \\ i E \gamma_1 e^{i\gamma_1 d} & i E \gamma_2 e^{i\gamma_2 d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a' \\ b' \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} P_1 = -A_1 \sigma_1 = - \frac{A_0 \exp(z_1/f)}{f} \times f \sigma_1 \\ P_2 = A_2 \sigma_2 = + \frac{A_0 \exp(z_1+d)/f}{f} \times f \sigma_2 \end{cases}$$



## ویژه کلاس های مجازی

## اندرکنش خاک و سازه - فصل پنجم: سختی دینامیکی

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)

$$\begin{Bmatrix} a' \\ b' \end{Bmatrix} = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \begin{bmatrix} \gamma_2 & i/E \\ -\gamma_1 & -i/E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \sigma_1 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} w_2 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\gamma_1 d} & e^{i\gamma_2 d} \\ E\gamma_1 i e^{i\gamma_1 d} & E\gamma_2 i e^{i\gamma_2 d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a' \\ b' \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} w_2 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \begin{bmatrix} e^{i\gamma_1 d} & e^{i\gamma_2 d} \\ E\gamma_1 i e^{i\gamma_1 d} & E\gamma_2 i e^{i\gamma_2 d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_2 & i/E \\ -\gamma_1 & -i/E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \sigma_1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} w_2 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \begin{bmatrix} \gamma_2 e^{i\gamma_1 d} - \gamma_1 e^{i\gamma_2 d} & (i/E)(e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d}) \\ E\gamma_1 \gamma_2 i e^{i\gamma_1 d} - E\gamma_1 \gamma_2 i e^{i\gamma_2 d} & -\gamma_1 e^{i\gamma_1 d} + \gamma_2 e^{i\gamma_2 d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \sigma_1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} w_2 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \sigma_1 \end{Bmatrix}$$

مطابق  $w_2 = T_{11} w_1 + T_{12} \sigma_1 \Rightarrow \sigma_1 = \frac{w_2 - T_{11} w_1}{T_{12}} \quad (I)$

مردم  $\sigma_2 = T_{21} w_1 + T_{22} \sigma_1$   
 $\sigma_2 = T_{21} w_1 + T_{22} \frac{(w_2 - T_{11} w_1)}{T_{12}} \quad (II)$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{11}/T_{12} & 1/T_{12} \\ T_{21} - T_{11}/T_{12} \times T_{22} & T_{22}/T_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{11} / T_{12} \\ T_{21} - T_{11} \times T_{22} / T_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 / T_{12} \\ T_{22} / T_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} Q_{11} &= -T_{11} / T_{12} & Q_{12} &= 1 / T_{12} \\ Q_{21} &= T_{21} - T_{11} \times T_{22} / T_{12} & Q_{22} &= T_{22} / T_{12} \end{aligned}$$

$$Q_{11} = - \frac{\frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} (\gamma_2 e^{i\gamma_1 d} - \gamma_1 e^{i\gamma_2 d})}{\frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} (i/E) (e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d})}$$

$$Q_{11} = iE \frac{\gamma_2 e^{i\gamma_1 d} - \gamma_1 e^{i\gamma_2 d}}{e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d}}$$

$$Q_{12} = \frac{1}{T_{12}} = \frac{1}{\left( \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \right) (i/E) (e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d})}$$

$$Q_{12} = \frac{iE (\gamma_1 - \gamma_2)}{e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d}}$$

$$Q_{21} = T_{21} - T_{11} \times T_{22} / T_{12}$$

$$Q_{21} = \frac{(\gamma_2 - \gamma_1) E i e^{-d/\beta}}{e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d}}$$



(ویژه کلاس های مجازی)

اندرکنش خاک و سازه - فصل پنجم: سختی دینامیکی

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)

$$Q_{22} = \frac{T_{22}}{T_{12}} = \frac{\left(\frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}\right) (-\gamma_1 e^{i\gamma_1 d} + \gamma_2 e^{i\gamma_2 d})}{\left(\frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}\right) \left(\frac{i}{E}\right) (e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d})}$$

$$Q_{22} = \frac{Ei (\gamma_1 e^{i\gamma_1 d} - \gamma_2 e^{i\gamma_2 d})}{e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d}}$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sigma_1 A_0 \exp(z_1/f) \\ \sigma_2 A_0 \exp[(z_1+d)/f] \end{Bmatrix} * \begin{Bmatrix} -\sigma_1 A_0 e^{(z_1/f)} \\ \sigma_2 A_0 e^{(z_1/f)} e^{d/f} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} w_1 + Q_{12} w_2 \\ Q_{21} w_1 + Q_{22} w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_0 e^{(z_1/f)} \\ A_0 e^{(z_1/f)} e^{d/f} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \left[ \frac{EA_0 \exp(z_1/f)}{f} \times \frac{f}{E} \right] \begin{bmatrix} -Q_{11} & -Q_{12} \\ Q_{21} e^{d/f} & Q_{22} e^{d/f} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA_0 e^{(z_1/f)}}{f} \begin{bmatrix} -Q_{11} f/E & -Q_{12} f/E \\ Q_{21} e^{d/f} f/E & Q_{22} e^{d/f} f/E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}$$



(ویژه کلاس های مجازی)

اندرکنش خاک و سازه - فصل پنجم: سختی دینامیکی

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA_0 \exp(\beta l)}{f} \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{S}_{11} = -\frac{Q_{11} f}{E} = -\frac{iE (\gamma_2 e^{i\gamma_1 d} - \gamma_1 e^{i\gamma_2 d})}{e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d}} \times \frac{f}{E}$$

$$\bar{S}_{11} = i \frac{\gamma_1 f e^{i\gamma_2 d} - \gamma_2 f e^{i\gamma_1 d}}{e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d}}$$

$$\bar{S}_{12} = -\frac{Q_{12} f}{E} = -\frac{iE (\gamma_1 - \gamma_2)}{e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d}} \times \frac{f}{E}$$

$$\bar{S}_{12} = i \frac{(\gamma_2 f - \gamma_1 f)}{e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d}}$$

$$\bar{S}_{21} = Q_{21} e^{d/f} \times \frac{f}{E}$$

$$\bar{S}_{21} = \frac{(\gamma_2 - \gamma_1) Ei e^{-d/f}}{e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d}} \times e^{(d/f)} \times \frac{f}{E}$$

$$\bar{S}_{21} = i \frac{(\gamma_2 f - \gamma_1 f)}{e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d}} = \bar{S}_{12}$$



$$\bar{S}_{22} = Q_{22} e^{d/f} (f/E)$$

$$\bar{S}_{22} = \frac{-\gamma_1 e^{i\gamma_1 d} + \gamma_2 e^{i\gamma_2 d}}{(i/E)(e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d})} \times e^{d/f} \times (f/E)$$

$$\bar{S}_{22} = \frac{-Eif}{E} \frac{\gamma_2 e^{i\gamma_2 d} - \gamma_1 e^{i\gamma_1 d}}{e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d}} e^{d/f}$$

$$\bar{S}_{22} = ie^{d/f} \frac{\gamma_1 f e^{i\gamma_1 d} - \gamma_2 f e^{i\gamma_2 d}}{e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d}}$$

$$\bar{S}_{11} = if \frac{\gamma_1 e^{i\gamma_2 d} - \gamma_2 e^{i\gamma_1 d}}{e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d}}$$

$$\bar{S}_{12} = \bar{S}_{21} = \frac{if(\gamma_2 - \gamma_1)}{e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d}}$$

$$\bar{S}_{22} = 2if e^{d/f} \frac{\gamma_1 e^{i\gamma_1 d} - \gamma_2 e^{i\gamma_2 d}}{e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d}}$$



(ویژه کلاس های مجازی)

اندرکنش خاک و سازه - فصل پنجم: سختی دینامیکی

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)

تخمین خاک به صورت نیمه تجربی:

عدد مناسبی برای یک ستون خاک با طول نامحدود (نیمه تجربی است).

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \sigma_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ E\gamma_1 i & E\gamma_2 i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}$$

$$w = a e^{i\gamma_1 z} + b e^{i\gamma_2 z}$$

$$w_1 = a e^{i\gamma_1 z_1} + b e^{i\gamma_2 z_1}$$

$$w_1 = a' + b'$$

۲. دلیل برافشایی در اینجا  $a=0$  و در نتیجه  $a'=0$  فرض می شود که در نتیجه آن حل میبایستی گردد.

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \sigma_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ E\gamma_1 i & E\gamma_2 i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b' \end{bmatrix} \Rightarrow w_1 = b'$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = E\gamma_2 i b'$$

$$\sigma_1 = E \frac{i}{2f} (1 + \sqrt{1 - 4a_0^2}) i w_1 = -\frac{E}{2f} (1 + \sqrt{1 - 4a_0^2}) w_1$$

$$P_1 = -\sigma_1 A_0 \exp\left(\frac{z_1}{f}\right)$$

$$P_1 = -\left(-\frac{E}{2f}\right) (1 + \sqrt{1 - 4a_0^2}) \times A_0 \exp\left(\frac{z_1}{f}\right) w_1$$

$$P_1 = \frac{EA_0}{f} \exp\left(\frac{z_1}{f}\right) \times \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - 4a_0^2}) w_1$$

$$P_1 = \frac{EA_0}{f} \exp\left(\frac{z_1}{f}\right) \bar{S}_{11} w_1 \quad \bar{S}_{11} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - 4a_0^2})$$

سختی استاتیکی ستون خاک با سطح مقطع

صورت سختی دینامیکی  
بررشمایی



## ویژه کلاس های مجازی

## اندرکنش خاک و سازه - فصل پنجم: سختی دینامیکی

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)

سختی دینامیکی حقیقی است  $\rightarrow$  موج تیلر غنی سور  $a_0 \ll \frac{1}{2}$

سختی دینامیکی موهومی است  $\rightarrow$  موج تیلر غنی سور  $a_0 > \frac{1}{2}$

$k$ : سختی دینامیکی مطلقا

$$a_0 \ll \frac{1}{2} \quad \begin{cases} k_1 = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - 4a_0^2}) \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

$$k = k_1 + i k_2$$

$$c_1 a_0 = k_2$$

$$a_0 > \frac{1}{2} \quad \begin{cases} k_1 = \frac{1}{2} \\ c_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{4a_0^2}} \end{cases}$$

$k_1$ : سختی حقیقی سختی دینامیکی (متر)

$k_2$ : سختی موهومی سختی دینامیکی (برگرا)

$$S_{11} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - 4a_0^2})$$

$$a_0 > \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (1 + i \sqrt{4a_0^2 - 1})$$

$$S_{11} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \sqrt{4a_0^2 - 1} = \frac{1}{2} + i \sqrt{\frac{4a_0^2 - 1}{4}}$$

$$S_{11} = k_1 + i k_2 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{4a_0^2 - 1}{4}}$$

$$k_2 = a_0 c_1 \Rightarrow \sqrt{\frac{4a_0^2 - 1}{4}} = a_0 c_1$$

$$\Rightarrow c_1 = \sqrt{\frac{4a_0^2 - 1}{4a_0^2}} \Rightarrow c_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{4a_0^2}}$$



(ویژه کلاس‌های مجازی)

اندرکنش خاک و سازه - فصل پنجم: سختی دینامیکی

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)

تحلیل سطح آزاد: حالتی را در نظر می‌گیریم که  $F \rightarrow \infty$  باشد. یعنی ارتعاش ستون ماک به سمت بی‌نهایت رفت و عملاً مقطع میل به بی‌نهایت می‌شود.

$$A = A_0 e^{z/f}$$

$$\lim_{f \rightarrow \infty} A = A_0 e^{z/\infty} = A_0$$

$$\gamma_1 = \frac{i}{2f} (1 - \sqrt{1 - 4a_0^2})$$

استدارش های معادله را باز نویسی می‌کنیم:

$$\gamma_2 = \frac{i}{2f} (1 + \sqrt{1 - 4a_0^2})$$

$$a_0 = \frac{\omega f}{\omega_c}$$

$$\gamma_1 = \frac{i}{2f} (1 - \sqrt{1 - 4(\frac{\omega f}{\omega_c})^2})$$

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \gamma_1 = \lim_{f \rightarrow \infty} \left( \frac{i}{2f} \right) (-2i \frac{\omega f}{\omega_c}) = \frac{\omega}{\omega_c}$$

$$\gamma_2 = \frac{i}{2f} (1 + \sqrt{1 - 4a_0^2}) = \frac{i}{2f} (1 + \sqrt{1 - 4(\frac{\omega f}{\omega_c})^2})$$

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \gamma_2 = \frac{i}{2f} (2i \frac{\omega f}{\omega_c}) = -\frac{\omega}{\omega_c}$$



## ویژه کلاس های مجازی

## اندرکنش خاک و سازه - فصل پنجم: سختی دینامیکی

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)

معادله  $\delta_1, \delta_2$  معادله نیروی انعطاف پذیر حاصل می شود:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{f} \frac{dw}{dz} + \frac{\omega^2}{v_c^2} w = 0$$

$$f \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{\omega^2}{v_c^2} w = 0$$

$$w(z) = B e^{i\gamma z} \Rightarrow -\gamma^2 + \frac{\omega^2}{v_c^2} = 0 \Rightarrow \gamma^2 = \left(\frac{\omega}{v_c}\right)^2$$

$$\Rightarrow \gamma_1 = \frac{\omega}{v_c} ; \gamma_2 = -\frac{\omega}{v_c}$$

$$z = a e^{i\omega/v_c z} + b e^{-i\omega/v_c z}$$

آلترن صریح سختی دینامیک را بازنویسی می کنیم:

$$\bar{S}_{11} = i f \frac{\gamma_1 e^{i\gamma_2 d} - \gamma_2 e^{i\gamma_1 d}}{e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d}} = i f \frac{\omega/v_c e^{-i\omega/v_c d} - (-\omega/v_c) e^{i\omega/v_c d}}{e^{i\omega d/v_c} - e^{-i\omega d/v_c}}$$

$$\bar{S}_{11} = i f \frac{\omega}{v_c} \times \frac{2 \cosh(i\omega d/v_c)}{2 \sinh(i\omega d/v_c)}$$

$$\cosh i\theta = \cos \theta \quad \text{یادآوری}$$

$$\sinh i\theta = i \sin \theta$$

$$\bar{S}_{11} = i \frac{\omega f}{v_c} \frac{\cos(\omega d/v_c)}{i \sin(\omega d/v_c)} = \frac{\omega f}{v_c} \cotan(\omega d/v_c)$$

$$\bar{S}_{11} = \frac{\omega f}{v_c} \cot(\omega d/v_c)$$

$$\bar{S}_{12} = i f \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)}{e^{i\gamma_1 d} - e^{i\gamma_2 d}} = i f \frac{(-\omega/v_c) - (\omega/v_c)}{e^{i\omega d/v_c} - e^{-i\omega d/v_c}}$$

$$\bar{S}_{12} = -i f \omega/v_c \times \frac{1 \times 2}{2 \sinh(i\omega d/v_c)} = -i \frac{\omega f}{v_c} \times \frac{1}{i \sin(\omega d/v_c)}$$

$$\bar{S}_{12} = -\frac{\omega f}{v_c} \times \frac{1}{\sin(\omega d/v_c)} \Rightarrow \bar{S}_{12} = -\frac{\omega f/v_c}{\sin(\omega d/v_c)}$$



## ویژه کلاس های مجازی

## اندرکنش خاک و سازه - فصل پنجم: سختی دینامیکی

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)

$$\bar{S}_{12} = -\frac{\omega f}{\omega_c} \times \frac{1}{\sin(\omega d/\omega_c)} \rightarrow \bar{S}_{12} = -\frac{\omega f/\omega_c}{\sin(\omega d/\omega_c)}$$

$$\bar{S}_{21} = \bar{S}_{12}$$

$$\bar{S}_{22} = \frac{if e^{(d/f)} (\omega/\omega_c) e^{i\omega d/\omega_c} - (-\omega/\omega_c) e^{-i\omega d/\omega_c}}{e^{i\omega d/\omega_c} - e^{-i\omega d/\omega_c}}$$

$$\bar{S}_{22} = if \frac{\omega}{\omega_c} \frac{2 \cosh(i\omega d/\omega_c)}{2 \sinh(i\omega d/\omega_c)} = \frac{i\omega f}{\omega_c} \frac{\cosh \omega d/\omega_c}{i \sinh \omega d/\omega_c}$$

$$\bar{S}_{22} = \frac{\omega f}{\omega_c} \cot(\omega d/\omega_c) \rightarrow \bar{S}_{22} = \frac{\omega f}{\omega_c} \cot(\omega d/\omega_c)$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA_0}{f} e^{(z/f)} \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}$$

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA_0}{f} (e^0) \times \left(\frac{\omega f}{\omega_c}\right) \times \frac{1}{\sin(\omega d/\omega_c)} \begin{bmatrix} \cos \omega d/\omega_c & -1 \\ -1 & \cos(\omega d/\omega_c) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = EA_0 \frac{\omega/\omega_c}{\sin(\omega d/\omega_c)} \begin{bmatrix} \cos \omega d/\omega_c & -1 \\ -1 & \cos \omega d/\omega_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA_0}{d} \frac{(\omega d/\omega_c)}{\sin(\omega d/\omega_c)} \begin{bmatrix} \cos(\omega d/\omega_c) & -1 \\ -1 & \cos(\omega d/\omega_c) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}$$

$$P_1 = 0 \Rightarrow \cos(\omega d/\omega_c) w_1 - (1) w_2 = 0$$

$$w_1 = \frac{1}{\cos(\omega d/\omega_c)} w_2$$

$$\therefore w_1 = \frac{1}{\cos(\omega d/\omega_c)} w_2 \rightarrow (FFA)$$



(ویژه کلاس های مجازی)

اندرکنش خاک و سازه - فصل پنجم: سختی دینامیکی

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)

$$w_t = \frac{1}{C_s(\omega d / V_c)} w_b$$

$$\text{if } C_s(\omega d / V_c) = 0 \Rightarrow w_t = \frac{w_b}{0} = \infty \quad \text{رضایت تشریح}$$

$$(\omega = \omega_n)$$

$$\omega d / V_c = \frac{2j-1}{2} \pi \Rightarrow \omega = \frac{(2j-1)\pi}{2} \times \frac{V_c}{d}$$

$$\omega_n = \omega = \frac{(2j-1)\pi}{2} \left( \frac{V_c}{d} \right)$$



# اندرکنش خاک و سازه - فصل پنجم: سختی دینامیکی

## (ویژه کلاس های مجازی)

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)